

★

Exercice 1

Étudier l'existence d'extrema locaux des fonctions suivantes en vous ramenant à l'étude d'une fonction quadratique :

- 1) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3xy$
- 2) $f(x, y) = 3(x + y)^2 - 4xy + 2$
- 3) $f(x, y) = 2(x - 1)^2 + 3(y - x)^2$
- 4) $f(x, y) = x^2 + 3x + 2 + 2y^2 - 2y + 1 + xy$

★

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

- 1) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2
- 2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et en déduire les points critiques de f .
- 3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critique. Préciser la nature de cet extremum et sa valeur.
- 4) Cet extremum est-il global ?

★

Exercice 3

On considère la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

- 1) a) Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R}^2
b) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.
- 2) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2
- 3) Montrer que f admet un unique point critique (a, b) dans \mathbb{R}^2
- 4) Montrer que f admet un extremum local en (a, b) dont on précisera la nature et la valeur.
- 5) Développer : $2x^2 + 2xy + 12x - 2(x + \frac{y}{2} + 3)^2$ et $\frac{y^2}{2} - 2y + 6 - \frac{1}{2}(y - 2)^2$.
- 6) En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que l'extremum trouvé à la question 4 est global.

★★

Exercice 4

(Oral ENS 2016) Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $k \geq 1$), on appelle maximiseur de g , quand il en existe, tout point $x_0 \in \mathbb{R}^k$ tel que $g(x_0) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^k} g(x)$. On dit aussi que x_0 maximise g .

On considère la fonction

$$F(m, s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{m^2 + (m-2)^2}{2s}}$$

- 1) Donner le domaine de définition D de F
- 2) Montrer qu'un point (m_0, s_0) maximise F si et seulement s'il maximise aussi $\ln(F)$.
- 3) Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial \ln(F)}{\partial m}(m, s)$ et $\frac{\partial \ln(F)}{\partial s}(m, s)$.
- 4) Montrer que, quelle que soit la valeur de $s \in \mathbb{R}_+^*$, $m_0 = 1$ est l'unique maximiseur de la fonction $m \mapsto F(m, s)$.
- 5) Montrer que la fonction $s \mapsto F(m_0, s)$ admet un unique maximiseur s_0 et calculer s_0 .
- 6) Montrer que pour tout $(m, s) \in D$,

$$(m, s) \neq (m_0, s_0) \implies F(m, s) < F(m_0, s_0)$$

★ ★

Exercice 5

En microéconomie, une fonction de production f est une fonction qui exprime une relation entre les facteurs de production et la quantité produite Q . Si on prend seulement en compte les deux facteurs de production que sont le capital (K) et le travail (L), on a $Q = f(K, L)$ où f est une fonction réelle de deux variables réelles à définir.

— On dit que les **rendements d'échelle** sont

- croissants si pour tout réel $\lambda > 1$, $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$
- décroissants si pour tout réel $\lambda > 1$, $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$
- constants si pour tout réel $\lambda > 1$, $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$

— La **productivité marginale** de chaque facteur est la dérivée partielle de f par rapport à ce facteur.

Dans cet exercice, on s'intéresse à une **fonction de Cobb-Douglas**, c'est-à-dire une fonction de production la forme $f(K, L) = cK^\alpha L^\beta$ où $c, \alpha, \beta > 0$ sont des paramètres qui dépendent du contexte.

- 1) Déterminer une relation entre $\alpha + \beta$ et le type de rendement d'échelle.
- 2) Exprimer les productivités marginales du capital et du travail en fonction de c, K, L, α et β .
- 3) Dans cette question on suppose que les rendements d'échelle sont constants.
 - a) Montrer que l'augmentation de l'utilisation d'un facteur fait diminuer sa productivité marginale (c'est la **loi des rendements décroissants**)
 - b) Montrer que l'augmentation de l'utilisation d'un facteur fait augmenter la productivité marginale **de l'autre facteur**

★ ★

Exercice 6

(Oral ENSAE 2013) Soit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-x^2 - y^2}$$

- 1) Soit α une constante, à quoi ressemble l'ensemble $\{(x, y) \text{ tels que } F(x, y) = \alpha\}$?
- 2) En quels points de \mathbb{R}^2 la fonction F est-elle maximale ?

★ ★ ★

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f : (x_1, x_2) \mapsto (3x_1 + 4x_2) e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$$

Déterminer les extremums locaux de f .

★

Exercice 8

On considère la fonction g définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x)$$

Montrer que g admet un unique extremum local et déterminer si c'est un extremum global.

★

Exercice 9

On s'intéresse au problème suivant : étant donné une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité dépendant d'un ou plusieurs paramètres, on cherche une estimation de ces paramètres à partir de l'observation empirique d'un échantillon issu de cette loi.

Pour une loi dont le paramètre est θ

- On pose $f(x, \theta) = \mathbb{P}(X = x)$ si X suit une loi discrète
- On pose $f(x, \theta) = f(x)$ où f est la densité de la loi si X suit une loi continue.

On appelle **vraisemblance de θ** au vu des observations $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ la fonction \mathcal{L} suivante :

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

Par exemple, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p inconnu, on a $f(1, p) = \mathbb{P}(X = 1) = p$ et $f(0, p) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, et donc :

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, p) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1 - p)^{1-x_i}$$

où $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ sont n observations de X .

On appelle **maximum de vraisemblance** la valeurs du (ou des) paramètre(s) qui maximise \mathcal{L} .

- 1) Montrer que $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta)$ est un maximum de \mathcal{L} si et seulement si $\ln \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \theta)$ est un maximum de $\ln \mathcal{L}$. On dit que $\ln \mathcal{L}$ est la log-vraisemblance.
- 2) Déterminer la valeur de p qui maximise $\ln(\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, p))$ si X suit une loi de Bernoulli.
- 3) Montrer que si X suit une loi normale d'espérance μ et de variance $v = \sigma^2$, la log-vraisemblance est

$$\ln \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \mu, v) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi v) - \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

puis montrer que le maximum est atteint pour $\mu = \bar{x}$ et $v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ avec $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.